МВ и ССО РСФСР
КРАСНОЯРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КОМБИНАТОРНЫЙ И АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Красноярск
1975

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ КОМБИНАТОРНОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ГРАФОВ. I

В. А. Лисковец

Введение

Хорошо известен общий результат перечислительного комбинаторного анализа, касающийся подсчета связных графов и аналогичных объектов алгебраической или теоретико-числовой природы. Он выражается формулой, которая связывает производящую функцию их числа с (формальным) логарифмом производящей функции общего числа различных (не обязательно связных) объектов того же вида. В алгебраических и аналитических исследованиях при положительном радиусе сходимости более употребительна равносильная запись этого результата в виде формулы, содержащей бесконечное произведение. Классическим примером является формула для перечисляющей производящей функции разбиений чисел.

Основную цель настоящей работы составляет разработка аппарата для перечисления с точностью до изоморфизма сильно связных ориентированных графов. Эту задачу явным образом впервые сформулировал, по-видимому Ф.Харари [18] (см. также список основных нерешенных проблем перечисления графов в [19], стр. 226).

Свойство сильной связности при наличии ориентации является естественным обобщением обычной связности. Разумеется, рассматриваемая задача далека от указанного образца как по общности и простоте получающегося результата, так и по широте возможных применений. Принципиальное отличие сильной связности от обычной, затрудняющее подсчет, заключается в том, что между компонентами сильной связности графа возможны многочисленные (односторонне направленные) связи. Все же с помощью разработанного аппарата окончательный результат удается выразить в виде формулы, весьма похожей на указанную выше, но содержащей вспомогательную производящую функцию.

Перечислительные методы можно естественно разбить на две группы: методы непосредственного перечисления, которые дают первоначальные аналитические выражения для искомых комбинаторных величин, и вторичные методы, которые применяются для последующего упрощения ранее полученных выражений. Конечно, такое разбиение довольно условно: классический метод Пойа, например, органически сочетает оба аспекта. Основополагающую роль в непосредственном перечислении неизоморфных объектов играет, как известно, лемма Бёрнсайда. В полной мере это осознано сравнительно недавно, и её прямое применение в перечислении графов, вместо традиционных методов, всё возрастает. Правда, использование данного метода опирается на подсчет рассматриваемых графов с отмеченными вершинами, обладающих фиксированным автоморфизмом, а получающиеся формулы обычно нуждаются в последующем упрощении или свертывании. Поэтому всё бóльшая потребность испытывается в методах непосредственного перечисления графов с отмеченными вершинами и особенно во вторичной перечислительной технике, которая разработана слабее. Именно сюда направлены усилия многих современных исследователей. Это обусловлено усложнением проблематики, а также стремлением к углублению и унификации результатов и упрощению вычислительных процедур. К указанному направлению относится и техника настоящей работы. В основе развиваемого подхода лежит использование аппарата функций от разбиений и их производящих функций. Получение искомого результата базируется на первичных комбинаторных формулах, выведенных нами в [6] и в принципе дававших решение рассматриваемой задачи. Проводимые здесь рассуждения обобщают процедуру упрощения формул из [4] для частного случая графов с отмеченными вершинами, предложенную Е.М.Райтом [11]

Следует сказать несколько слов о результирующей формуле. Коэффициенты входящей в неё вспомогательной производящей функции имеют лишь обобщенную комбинаторную интерпретацию, хотя и определяются „по Бёрнсайду". Окончательно они выражаются как подходящие значения определенных полиномов, содержащих переменные 3 типов и задаваемых линейным рекуррентным соотношением. А коэффициенты последнего получаются из циклических индексов симметрических групп с помощью специального оператора ρ , характеризующего индуцированное действие подстановок одновременно на точках и парах точек. Важным достоинством введенных объектов является их бо́льшая универсальность, позволяющая без существенных дополнительных усилий (а именно, лишь с помощью подходящей подстановки переменных) получать из них перечислительные формулы для многих других классов графов. Это значительно снижает общую вычислительную сложность совокупности решаемых задач. Такая унификация достигается благодаря высокой степени специализации переменных и обнаруживающейся универсальности оператора ρ для определенного круга перечислительных задач.

Излагаемые идеи явились развитием наших прежних исследований и техники, разработанной Р.У.Робинсоном. В основе подхода Робинсона лежит глубокая идея, восходящая к Дж.Х.Редфилду, рассматривать суммы циклических индексов групп автоморфизмов перечисляемых графов вместо обычных производящих функций . В силу одного результата Н.Г.де Брёйн указанные суммы совпадают с введенными здесь производящими функциями, однако их выражение, исходя из такого задания, обычно является технически более сложным делом, хотя и обладает бесспорными достоинствами. Развиваемый нами подход представляется более эффективным и общим, поскольку мы не связаны с необходимостью интерпретировать отдельные части рядов как цельные суммы циклических индексов подходящих групп и оперируем с более элементарными объектами (одночленами), которые сравнительно легко выражаются, непосредственно исходя из комбинаторного смысла соответствующих функций от разбиений (число изучаемых графов с автоморфизмом заданной цикловой структуры) при помощи формальных преобразований. В целом рассматриваемый аппарат производящих функций может служить общей базой для получения и свертывания формул, касающихся подсчета классов изоморфизма, и позволяет решать задачи, не поддающиеся более элементарным методам. В частности, кроме сильно связаных ориентированных графов, это дает перечислительные результаты для некоторых видов ориентированных графов без контуров (см. ч.II и [16]) и 2-связных графов (см. [15]).

В 1 части работы рассматриваются лишь обыкновенные сильно связные ориентированные графы. Основной её результат опубликован в [8].

§1. Определения и обозначения

$\mathcal{R} = \mathcal{Q}[[x,t,\underline{y},\underline{z},\underline{z}']]$ означает (коммутативное) кольцо формальных степенных рядов над полем рациональных чисел $\mathcal{Q}$ от счетного множества переменных x; t; y_1, y_2, ..., y_n, ...; z_1, z_2, ...; z_1', z_2', ...; $\mathcal{J} = \mathcal{Q}[[x,t,\underline{z},\underline{z}']] \subset \mathcal{R}$.

Каждому одночлену $r \in \mathcal{R}$ приписывается в е с $\omega(r)$, где ω – функция, принимающая значения $\omega(f)=0$, $f \in \mathcal{Q}$,

$$f \neq 0,\quad \omega(x)=\omega(t)=1,\quad \omega(y_n)=\omega(z_n)=\omega(z_n')=n,\quad n=1,2,\ldots,$$

$\omega(r_1 r_2) = \omega(r_1)+\omega(r_2)$. Тем самым вносится естественная в комбинаторном плане градуировка $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0 \oplus \mathcal{R}_1 \oplus \ldots$, где $\mathcal{R}_n$ – конечномерное векторное пространство однородных многочленов веса n.

Пусть $\tau = (1^{j_1} 2^{j_2} \ldots n^{j_n})$ – разбиение числа n, т.е. $\sum_\ell \ell j_\ell \equiv |\tau| = n$, $j_\ell \geqslant 0$ – число слагаемых τ вида ℓ. Вводится обозначение $\underline{y}^\tau = \prod_\ell y_\ell^{j_\ell}$, $\underline{y}^\tau \in \mathcal{R}_n$, и аналогично $\underline{z}^\tau$, $\underline{z}'^\tau$. Пусть g – подстановка на конечном множестве, $\tau = \tau(g)$ – её цикловая структура (т и п), т.е. j_ℓ – число циклов g длины ℓ. g индуцирует подстановку $g^{(2)}$, естественно действующую на множестве всех 2-элементных подмножеств исходного множества. Тип $g^{(2)}$ зависит лишь от τ, он обозначается через $\tau^{(2)}$ и хорошо известен в теории перечисления графов (см. [13, 18, 7]). На $\mathcal{A}$ вводится счетно-аддитивный $\mathcal{J}$-линейный оператор ρ [14,7](т.е. эндоморфизм $\mathcal{A}$ как $\mathcal{J}$-модуля), задаваемый действием (операторы пишем слева от элементов)

$$\rho \underline{y}^{\tau} = \underline{y}^{\tau} \underline{z}^{\tau^{(2)}}.$$

Пусть G - группа подстановок конечной степени. Циклический индекс G - это многочлен

$$Z(G) \equiv Z(G; y_1, y_2, \ldots) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \underline{y}^{\tau(g)} = \frac{1}{|G|} \sum_{\tau, |\tau| = n} \varphi_G(\tau) \underline{y}^{\tau},$$

где $|G|$ - порядок G, $\varphi_G(\tau)$ - число подстановок в G типа τ. Обозначим $D_n = Z(\mathfrak{S}_n)$, где $\mathfrak{S}_n$ - симметрическая группа степени n. $D_n = \sum_{|\tau| = n} \underline{y}^{\tau} / \tau! \pi(\tau)$, где

$$\tau! = \prod_{\ell} (j_{\ell}!), \quad \pi(\tau) = \prod_{\ell} \ell^{j_{\ell}}.$$

Вводится ряд $D = \sum_{n=0}^{\infty} D_n = exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{k}\right)$ ([13], стр. 84), где $D_0 = 1$. Здесь exp - обычный оператор, применимый к элементам $\mathcal{A}$ без свободного члена и связанный стандартными соотношениями с линейными операциями и операторами частных дифференцирований ∂_{y_1}, ∂_{y_2}, ... и т.д. Обратный оператор обозначается символом log.

Напомним ряд определений, касающихся разбиений чисел (см., например, [6]). К разбиениям причисляется пустое разбиение $\emptyset = (1^0 2^0 \ldots)$, $|\emptyset| = 0$, $\underline{y}^{\emptyset} = 1$, $\emptyset ! = 1$. Тип $\emptyset$ имеет подстановка на пустом множестве. При записи разбиений члены с $j_{\ell} = 0$ и показатели $j_{\ell} = 1$ обычно опускаются, разбиение (1^1) обозначается просто как 1. Если $\sigma = (1^{i_1} 2^{i_2} \ldots)$, то $\tau + \sigma = (1^{j_1 + i_1} 2^{j_2 + i_2} \ldots)$. Полагаем $\sigma \leqslant \tau$, если $i_{\ell} \leqslant j_{\ell}$, $\ell = 1, 2, \ldots$, и вводим в этом случае разность

$\tau-\sigma = (1^{j_1-i_1}2^{j_2-i_2}\ldots)$ и $C_\tau^\sigma = \frac{\tau!}{\sigma!(\tau-\sigma)!}$. $k(\tau)=\sum_\ell j_\ell$ означает число слагаемых τ. Если все слагаемые τ делятся на $d, d\geqslant 1$, т.е. $\tau=(d^{j_d}(2d)^{j_{2d}}\ldots)$, то пишем $d\,|\,\tau$ и вводим разбиение $\tau^{|d}=(1^{j_d}2^{j_{2d}}\ldots)$. $\tau^{|d}!=\tau!$, $\pi(\tau^{|d})=\pi(\tau)\,d^{-k(\tau)}$. Кроме того, наименьшее слагаемое разбиения $\tau\neq\emptyset$, т.е. наименьшее ℓ, для которого $j_\ell>0$, обозначается через m_τ. Условимся считать, что соотношению $m_\tau\geqslant m$ удовлетворяет и $\tau=\emptyset$ для любого $m\geqslant 1$.

К элементам $\mathcal{A}$ будем применять следующие операции суперпозиции, или подстановки переменных (здесь и всюду далее все не указанные в определениях переменные предполагаются остающимися а месте; $k=1,2,\ldots$):

$$\Gamma_\sigma : y_k \to y_k \prod_\ell (1+x^{[k,\ell]})^{(k,\ell)\, i_\ell}, \quad \text{где} \quad \sigma=(1^{i_1}2^{i_2}\ldots),$$

(k,ℓ) означает наибольший общий делитель чисел k и ℓ $[k,\ell]$ - их наименьшее общее кратное;

$$\Delta : \; y_{2k} \longrightarrow \frac{1+x^{2k}}{(1+x^k)^2}\, y_{2k};$$

$$\Theta_d : \; y_k \longrightarrow y_{dk}, \quad d\geqslant 1;$$

$$\Lambda : \; z_k \longrightarrow 1+x^k;$$

$$\Phi : \; y_k \longrightarrow t^k;$$

$$\Phi_0 : \; y_k \longrightarrow 1;$$

$$X : \; z_k \longrightarrow z'_k, \; z'_k \longrightarrow z_k;$$

$$\Omega_m : \; y_\ell \longrightarrow 0, \; \ell=1,2,\ldots,m-1, \quad m\geqslant 2;$$

$\Omega_1 = I$ - тождественный автоморфизм.

Вводятся обозначения

$$\mathcal{F}_0 \Psi = \overline{\Psi}, \ X \Psi X = \Psi',$$

где Ψ - некоторый оператор. В частности

$$\rho' \underline{y}^{\tau} = \underline{y}^{\tau} \underline{\underline{z}}'^{\tau^{(2)}}, \quad \Lambda' z'_k = 1 + x^k .$$

Некоторые из указанных операторов (а именно, Λ, $\mathcal{F}_0$ и производные от них) являются лишь частичными эндоморфизмами $\mathcal{H}$, так что принадлежность требуемых элементов к области их определения нуждается в специальной проверке, которая однако трудностей не вызывает и оговариваться не будет.

Используется еще оператор $\Omega^*_m = \Omega_m - \Omega_{m+1}, m \geq 1$, обращающий в 0 члены, содержащие переменные $y_1, \ldots, y_{m-1}$ или не содержащие y_m. Пусть $\mathcal{Y}$ - идеал $\mathcal{H}$, порожденный переменными y_i, $i \geq 1$, тогда $\Omega = \sum_{m=1}^{\infty} \Omega^*_m$ является его тождественным автоморфизмом ($\sum_{m=1}^{k} \Omega^*_m$ обращает в 0 члены, не содержащие $y_1, \ldots, y_k$).

Относительно графов мы придерживаемся в основном терминологии книги К.Бержа [1]. Ребра отождествляем с неупорядоченными парами вершин, дуги (ориентированные ребра) - с упорядоченными, петли - с парами одинаковых вершин. Ориентированные графы называются *диграфами*. Граф называется обыкновенным, если он не содержит петель и одинаковых ребер или дуг. Связные диграфы иногда будем называть *слабо связными*. Диграф называется *сильно связным*, если в нем каждая вершина достижима из любой другой (посредством ориентированного пути), и *корневым инициально связным*, если в нем выделена одна вершина, называемая к о р н е м, и из нее достижимы все остальные вершины. Будем рассматривать действие группы автоморфизмов графа с корнем лишь на множестве некорневых вершин.

Пусть $\underline{H}$ – собирательное обозначение рассматриваемых классов графов без корня. Используется следующая общая система обозначений. $\underline{H}_{n,N}$ – подкласс графов из $\underline{H}$ с n вершинами и N ребрами или дугами, $\underline{H}_{n,N}(\mathcal{M})$ – (конечное) множество различных графов из $\underline{H}_{n,N}$, множеством вершин которых является $\mathcal{M}$, где $|\mathcal{M}|=n$. $H(n,N)$ означает число всех попарно неизоморфных графов из $\underline{H}_{n,N}$. Точнее говоря, $H(n,N)$ есть число орбит группы $\mathfrak{S}_n$ относительно её индуцированного действия на множество $\underline{H}_{n,N}(\mathcal{M})$, где $\mathcal{M}$ - фиксированное множество элементов, перемещаемых $\mathfrak{S}_n$, выбор которого безразличен. Далее $h(\tau,N)$ означает число графов из $\underline{H}_{n,N}(\mathcal{M})$, инвариантных относительно произвольно выбранной подстановки на $\mathcal{M}$ цикловой структуры τ. В частности, $h((1^n),N) = h(n,N)$, где $h(n,N)$ - число графов из $\underline{H}_{n,\mathring{N}}$ с отмеченными вершинами, т.е. $h(n,N)=|\underline{H}_{n,N}(\mathcal{M})|$. Существенно, что значение $h(\tau,N)$ не зависит от выбора подстановки типа τ; всюду в дальнейшем в её роли фигурирует фиксированная подстановка g на $\mathcal{M}$. Вводятся перечисляющие производящие функции (или многочлены) по числу ребер или дуг

$$H(n,x)=\sum_{N=0}^{\infty} H(n,N)x^N,\ H(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty} H(n,x)t^n,$$

$h(\tau,x)=\sum_N h(\tau,N)x^N$ и (экспоненциальная) производящая функция $h(y,x)=\sum_{\tau\geqslant\emptyset} h(\tau,x)y^\tau/\tau!\,\pi(\tau)$, где значение $h(\emptyset,x)=$ $\mathring{=} H(0,x)$, равное 0 или 1, принимается отдельным соглашением. При перечислении лишь по n, когда множества

$\underline{H}_n(\mathcal{M}) = \bigcup\limits_N \underline{H}_{n,N}(\mathcal{M})$ конечны, соответственно используются обозначения $H(n), h(\tau), h(\underline{y})$, так что, например, $h(\tau) = \sum\limits_N h(\tau,N) = h(\tau,x)\big|_{x=1}$. Такой же смысл обычно будет придаваться обозначениям $\varphi(\tau,x), \varphi(\tau), \varphi(\underline{y},x)$ в случае, когда $\varphi(\tau,N)$ – произвольная функция от $\tau > \emptyset$ и N. Для классов графов с корнем в обозначения добавляется штрих, в остальном они аналогичны, только $h'(\underline{y},x) = \sum\limits_{\tau>1} h'(\tau,x)\dfrac{\underline{y}^{\tau-1}}{(\tau-1)!\,\pi(\tau)}$.

При этом предполагается, что в каждом множестве вершин одна вершина зафиксирована в качестве корня. $H'(0,x) = 0$. Если $\underline{H}'$ – класс, получающийся из $\underline{H}$ фиксациями корня, то, очевидно, $h'(\tau,x) = h(\tau,x)$, где $\tau > 1$, $h'(\underline{y},x) = \partial_{y_1} h(\underline{y},x)$. Напоминаем, что изоморфизм корневых графов предусматривает соответствие корней.

Если не оговорен иной смысл величин, эта система обозначений применяется, в частности, для следующих классов обыкновенных графов (здесь мы несколько отклоняемся от обозначений предыдущих публикаций):

$\underline{S}$ – класс сильно связных диграфов;

$\underline{A}'$ – класс корневых инициально связных диграфов;

$\underline{P}(\underline{Q})$ – общий класс диграфов (соответственно неориентированных графов);

$\underline{C}$ – класс связных неориентированных графов.

Полагаем, $S(0,x) = C(0,x) = 0$, $P(0,x) = Q(0,x) = 1$.

Рассматриваются также д в у д о л ь н ы е (точнее, (X,Y)- двудольные) графы из $\underline{Q}$ и $\underline{P}$, т.е. графы, у которых множество вершин разбито на 2 непересекающихся подмножества (X и Y) и все ребра (дуги) соединяют вершины из разных подмножеств (и направлены из 1-го во 2-е).

$q(\sigma,\nu,N)\,(p(\sigma,\nu,N))$ обозначает число (X,Y)- двудольных графов из $\underline{Q}$ (из $\underline{P}$) с N реорами (дугами), инвариантных относительно выбранной пары подстановок на X и Y типов σ и ν соответственно, и т.п. $p(\emptyset,\nu,x)=1$, Очевидно равенство (принимаемое и при $\sigma=\emptyset$ или $\nu=\emptyset$)

$$p(\sigma,\nu,x)=p(\nu,\sigma,x)=q(\sigma,\nu,x). \tag{1}$$

§2. Обыкновенные сильно связные диграфы

Общая связь введенных комбинаторных величин устанавливается леммой Бёрнсайда (см. [3]), которая в нашем случае представляется в следующем виде [5].

Лемма 1.

$$H(n,x)=\sum_{|\tau|=n}\frac{h(\tau,x)}{\tau!\,\pi(\tau)}\;,\; H'(n,x)=\sum_{\substack{|\tau|=n\\ \tau\geq 1}}\frac{h'(\tau,x)}{(\tau-1)!\,\pi(\tau)}\;; \tag{2}$$

$$H(t,x)=\mathcal{F}h(\underline{y},x),\quad H'(t,x)=t\,\mathcal{F}h'(\underline{y},x). \tag{2'}$$

Непосредственный комбинаторный смысл рассматриваемых производящих функций раскрывается следующим несложно доказываемым, но красивым утверждением.

Предложение 1 ([2], см. также [9, 16]). $h^{(\prime)}(\underline{y},x)=$ $=\sum_{n,N} z(\underline{H}^{(\prime)}_{n,N})x^N$, где $z(\underline{H}_{n,N})\,(z(\underline{H}'_{n,N}))$ есть сумма цикличеких индексов групп автоморфизмов попарно неизоморфных графов из $\underline{H}_{n,N}$ (соответственно из $\underline{H}'_{n,N}$), $z(\underline{H}_{0,0})=H(0)$, $z(\underline{H}_{0,N})=0, N>0$.

Сформулируем 2 важные для дальнейшего леммы.

Лемма 2.

$$q(\tau,x)=\bar{\Lambda}\rho\,\underline{y}^{\tau}; \tag{3}$$

$$p(\tau,x)=q(\tau,x)^2\bar{\Delta}\,\underline{y}^{\tau}; \tag{4}$$

$$q(\sigma,\nu,x)=\bar{\Gamma}_\sigma\,\underline{y}^{\nu}. \tag{5}$$

Доказательство прямо вытекает из определений и известных формул для $q(\tau,x)$ и $p(\tau,x)$ (см., например, [18,7]).

Следствие.

$$q(\underline{y},x)=\Lambda\rho D. \qquad (3')$$

Лемма 3. [7].*)

$$q(\sigma+\nu,x)=q(\sigma,x)\,q(\nu,x)\,p(\sigma,\nu,\omega). \qquad (6)$$

Перейдем к связным графам. Обозначим

$$c^*(\tau,x)=\sum_{d\mid\tau} d^{\,k(\tau)-1}c(\tau^{\mid d},x^d).$$

Лемма 4. $c^*(\tau,x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\sum_{(m)\leqslant\sigma\leqslant\tau} C_{\tau-(m)}^{\sigma-(m)}\,q(\tau-\sigma,x)\,c^*(\sigma,x)=q(\tau,x),\quad \tau\geqslant(m). \qquad (7)$$

Доказательство легко получается методом вложения [6] (ср. доказательство основной теоремы из [6]). В частном случае $m=1$ $\left(c^*(\tau,x)=c(\tau,x)\right)$ это утверждение доказано в [5].

Следствие 1. Для $c^*(\underline{y},x)=\sum_{\tau}c^*(\tau,x)\frac{\underline{y}^{\tau}}{\tau!\,\pi(\tau)}$ справедливо соотношение

$$\partial_{y_m}\mathfrak{R}_m^{*}c^*(\underline{y},x)=\frac{\partial_{y_m}\mathfrak{R}_m\,q(\underline{y},x)}{\mathfrak{R}_m\,q(\underline{y},x)},\quad m\geqslant 1. \qquad (8)$$

Доказательство. Умножим обе части (7) на $\frac{\underline{y}^{\tau-(m)}}{(\tau-(m))!\,\pi(\tau)}$ и просуммируем по всем τ с $m_\tau=m$. Получим после очевидных преобразований

$$\sum_{\nu,m_\nu\geqslant m}\frac{q(\nu,x)\,\underline{y}^{\nu}}{\nu!\,\pi(\nu)}\sum_{\sigma,m_\sigma=m}\frac{c^*(\sigma,x)\,\underline{y}^{\sigma-(m)}}{(\sigma-(m))!\,\pi(\sigma)}=\sum_{\tau,m_\tau=m}\frac{q(\tau,x)\,\underline{y}^{\tau-(m)}}{(\tau-(m))!\,\pi(\tau)},\quad m\geqslant 1,$$

что равносильно (8), поскольку $\partial_{y_m}\mathfrak{R}_m=\partial_{y_m}\mathfrak{R}_m^{*}$.

Из соотношения (8) прямо вытекает следующий известный

---

*) См. соотношение (1).

результат, о котором шла речь во введении.

Следствие 2. ([18]; см. [13], стр. 174).

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{C(t^d, x^d)}{d} = \log Q(t,x). \tag{9}$$

Доказательство. Сначала докажем, что

$$\mathfrak{R}_m^* c^*(\underline{y},x) = \sum_{d|m} \frac{1}{d}\theta_d \mathfrak{R}_{\frac{m}{d}}^* c(\underline{y}, x^d). \tag{10}$$

В самом деле,

$$\mathfrak{R}_m^* c^*(\underline{y},x) = \sum_{\tau, m_\tau = m} \frac{c^*(\tau,x)\underline{y}^\tau}{\tau!\,\pi(\tau)} = \sum_{m_\tau=m}\sum_{d|m} d^{\,k(\tau)-1} c(\tau^{|d}, x^d)\frac{\underline{y}^\tau}{\tau!\,\pi(\tau)} =$$

$$= \sum_{d|m}\sum_{m_\tau=m} \frac{1}{d} c(\tau^{|d}, x^d)\frac{\theta_d\, \underline{y}^{\tau^{|d}}}{(\tau^{|d})!\,\pi(\tau^{|d})} = \sum_{d|m}\frac{1}{d}\theta_d \sum_{\nu, m_\nu=\frac{m}{d}} c(\nu, x^d)\frac{\underline{y}^\nu}{\nu!\,\pi(\nu)},$$

что равносильно (10).

Пропотенцируем (8), учитывая, что $\mathfrak{R}_m^* r|_{y_m=0} = 0,\ r\in\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R}_m^* c^*(\underline{y},x) = \log \mathfrak{R}_m q(\underline{y},x) - \log \mathfrak{R}_m q(\underline{y},x)|_{y_m=0} =$$

$$= \mathfrak{R}_m \log q(\underline{y},x) - \mathfrak{R}_{m+1}\log q(\underline{y},x) = \mathfrak{R}_m^* \log q(\underline{y},x), \quad m \geqslant 1.$$

Отсюда, суммируя по всем m, получаем, в силу тождественности $\mathfrak{R}$ на $\mathcal{Y}$,

$$c^*(\underline{y},x) = \log q(\underline{y},x). \tag{11}$$

Далее по (10)

$$c^*(\underline{y},x) = \sum_{m=1}^{\infty}\mathfrak{R}_m^* c^*(\underline{y},x) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{d|m}\frac{1}{d}\theta_d \mathfrak{R}_{\frac{m}{d}} c(\underline{y},x^d) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d}\theta_d\mathfrak{R}_k^* c(\underline{y},x^d) = \sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d}\theta_d\sum_{k=1}^{\infty}\mathfrak{R}_k^* c(\underline{y},x^d) = \sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d}\theta_d c(\underline{y},x^d),$$

так что, в силу (11),

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} \theta_d c(\underline{y}, x^d) = \log q(\underline{y}, x). \qquad (11')$$

Применив к обеим частям последнего равенства $\mathcal{P}$ и учитывая (2'), получаем (9). Следствие доказано.

Впервые соотношение (11') более сложным путем, использующим выражение группы автоморфизмов графа через группы автоморфизмов его компонент связности с помощью операций сплетения и прямого произведения, вывел Р. У. Робинсон [15].

Пусть $a_{(m)}(\tau, N)$, где $(m) \leqslant \tau$, $m \geqslant 1$, означает число обыкновенных диграфов с N дугами, инвариантных относительно подстановки g, каждая вершина которых достижима из какой-либо вершины фиксированного заранее цикла g длины m. При $m=1$ эта функция подробно изучалась в [5].

<u>Лемма 5</u> [6].

$$\sum_{(m) \leqslant \epsilon \leqslant \tau} C_{\tau-(m)}^{\epsilon-(m)} p(\tau-\epsilon, x) p(\tau-\epsilon, \epsilon, x) a_{(m)}(\epsilon, x) = p(\tau, x), \quad \tau \geqslant (m). \qquad (12)$$

<u>Следствие 1</u>. Справедливо тождество

$$a_{(m)}(\tau, x) = \frac{p(\tau, x)}{q(\tau, x)} c^{*}(\tau, x). \qquad (13)$$

В самом деле, в силу (1), (4), (6), (7), обе части (13) удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению (12), имеющему единственное решение. При $m=1$, $x=1$ это тождество доказано в [5] прямым комбинаторным путем.

Отметим еще следующее неочевидное тождество.

<u>Следствие 2</u>. Если ℓ и m - два слагаемых τ, то

$$a_{(\ell)}(\tau, x) = a_{(m)}(\tau, x).$$

Перейдем к сильно связным диграфам. Обозначим

$$S^*(\tau, x) = \sum_{d|\tau} d^{k(\tau)-1} S(\tau^{|d}, x^d),$$

где $S^*(\tau, N)$ выражает число диграфов из $\underline{P}_{n,N}$, инвариантных относительно q, в которых из всякой вершины достижима какая-либо вершина всякого цикла q (см. лемму 3 [6]), и введем многочлены $u(\tau, x)$ и $v(\tau, x)$

$$u(\underline{y}, x) \doteq \sum_{\tau \neq \emptyset} \frac{u(\tau, x)\, \underline{y}^\tau}{\tau!\, \pi(\tau)} = 1 - q(\underline{y}, x)^{-1}, \qquad (14)$$

$$v(\tau, x) = \frac{p(\tau, x)}{q(\tau, x)}\, u(\tau, x) \qquad (15)$$

(ср. (13)). Очевидно, (14) равносильно рекуррентному соотношению

$$\sum_{\emptyset \neq \sigma \leq \tau} C_\tau^\sigma\, q(\tau-\sigma, x)\, u(\sigma, x) = q(\tau, x), \ \tau \neq \emptyset; \ \ u(\emptyset, x) = 0. \qquad (16)$$

<u>Теорема 1</u>. $S^*(\tau, x)$, $\tau \neq \emptyset$, удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$S^*(\tau, x) = v(\tau, x) + \sum_{(m) \leq \sigma < \tau} C_{\tau-(m)}^{\sigma-(m)}\, v(\tau-\sigma, x)\, S^*(\sigma, x), \qquad (17)$$

где *) $m = m_\tau$.

Эта теорема и её доказательство обобщают результат Е.М.Райта [11] для $S(n, x)$, т.е. для $\tau = (1^n)$. Мы будем доказывать несколько более общее утверждение, которое понадобится во II части. Заметим, что наибольшие технические трудности вызывает случай $m_\tau > 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В основе доказательства лежит рекуррентное соотношение для $S^*(\tau, x)$, доказанное нами в [6]:

$$\sum_{(m) \leq \sigma \leq \tau} C_{\tau-(m)}^{\sigma-(m)}\, \lambda_\sigma(\tau-\sigma, x)\, S^*(\sigma, x) = a_{(m)}(\tau, x), \quad \tau \geq (m), \qquad (18)$$

---

*) По-видимому, это условие можно снять (в предположении $(m) \leq \tau$).

где $\lambda_\sigma(\tau, x)$, $\sigma \neq \emptyset$, удовлетворяет соотношению

$$\sum_{\emptyset \neq \nu \leq \tau} C_\tau^\nu\, p(\tau-\nu, x)\, p(\tau-\nu, \nu, x)\, \lambda_\sigma(\nu, x) = p(\tau, x)\, p(\sigma; \tau, x)\,^{*)} \qquad (19')$$

Вывод соотношения (17) из (18), (19) и (12) опирается лишь на некоторые свойства функции $p(\tau, x)$ и $p(\sigma, \nu, x)$. А именно, будем теперь до конца доказательства предполагать, что $p(\tau, x)$ – произвольная функция от разбиений, значениями которой являются обратимые в $\mathcal{R}$ ряды от x (т.е. с ненулевым свободным членом), $p(\emptyset, x)=1$. От $q(\tau, x)$ будем требовать, чтобы она представлялась в виде $q(\tau, x) = \Lambda p y^\tau$, где Λ теперь означает произвольную суперпозицию, переводящую z_k в обратимые ряды от x и домножающую переменные y_k на обратимые ряды. Заметим, что справедливо более общее, нежели (6), соотношение

$$p y^{\sigma+\nu} = (p y^\sigma)(p y^\nu)\, \xi_\sigma y^\nu \qquad (6')$$

где $\xi_\sigma = y_k \longrightarrow y \prod_\ell z_{[k,\ell]}^{(k,\ell) i_\ell}$, $k = 1, 2, \dots$, $\sigma = (1^{i_1} 2^{i_2} \dots)$

Очевидно, $\xi_\sigma y^\nu = \xi_\nu y^\sigma$. Введём суперпозицию Γ_σ следующим образом:

---

*) Как отмечено в [8], автор нашёл также прямое и более простое доказательство теоремы 1, основанное на рассмотрении ациклической схемы соединения компонент сильной связности в произвольном диграфе. Однако мы его здесь не приводим, поскольку излагаемое доказательство представляет самостоятельный интерес и ввиду того, что несколько ранее об аналогичном факте сообщил Р.У.Робинсон (см. 20, стр. 217), опубликовавший, правда, до сих пор результаты лишь для случая графов с отмеченными вершинами [17].

$$\Gamma_\sigma : y_k \to \Lambda \xi_\sigma y_k , \quad k \geq 1 .$$

Из определения ξ_σ и Λ мы заключаем, что Γ_σ - автоморфизм $\mathcal{R}$. В силу $(6')$, $q(\tau,x)$ удовлетворяет соотношению (6), где $p(\sigma,\nu,x)$ удовлетворяет (5) с введенным здесь Γ_σ.

Величины $u(\tau,x)$ и $v(\tau,x)$ мы также определим в более общем виде. А именно, пусть

$$h(\tau,x) = \frac{p(\tau,x)}{\varphi(\tau,x)q(\tau,x)} \qquad (4')$$

где $\varphi(\tau,x)$ - произвольная мультипликативная функция от τ (т.е. $\varphi(\sigma+\nu,x)=\varphi(\sigma,x)\varphi(\nu,x)$), значениями которой являются обратимые ряды от x. Вводим

$$u(\underline{y},x) = 1 - h(\underline{y},x)^{-1} \qquad (14')$$

(где, как обычно, $h(\underline{y},x) = \sum_{\tau\geq\emptyset} h(\tau,x)\underline{y}^\tau/\tau!\,\pi(\tau)$) и

$$v(\tau,x) = \varphi(\tau,x)q(\tau,x)u(\tau,x). \qquad (15')$$

Мы докажем, что соотношение (17) вытекает из (18), (19) и (12), где входящие величины удовлетворяют соотношениям (15'), (14'), (4'), (5) и (6) и сделанным предположениям. Это даст доказательство теоремы, так как при исходной интерпретации $p(\tau,x)$, $q(\tau,x)$, Λ и Γ_σ и при $\varphi(\tau,x) = \bar{\Delta}\,\underline{y}^\tau$ все величины также приобретают прежний смысл ($h(\tau,x)$ становится равной $q(\tau,x)$). Условимся для краткости опускать в выкладках аргумент x.

Положим

$$\frac{a_{(m)}(\tau)}{\varphi(\tau)q(\tau)} = c^*(\tau). \qquad (13')$$

Заменим в (12) $p(\tau+\sigma,\sigma)$ на $\dfrac{q(\tau)}{q(\sigma)q(\tau-\sigma)}$ по (6). Получим для $c^*(\tau)$ соотношение

$$\sum_{(m)\leqslant\sigma\leqslant\tau} C_{\tau-(m)}^{\sigma-(m)} h(\tau-\sigma)c^*(\sigma) = h(\tau), \quad \tau \geqslant (m). \tag{7'}$$

Отсюда, как и выше,

$$\partial_{y_m} \mathfrak{R}_m^* c^*(\underline{y}) = \frac{\partial_{y_m} \mathfrak{R}_m h(\underline{y})}{\mathfrak{R}_m h(\underline{y})} . \tag{8'}$$

Аналогично из (19) получаем

$$\sum_{\emptyset\leqslant\nu\leqslant\tau} C_\tau^\nu h(\tau-\nu)\frac{\lambda_\sigma(\nu)}{\varphi(\nu)q(\nu)} = h(\tau)p(\sigma,\tau).$$

Введем $\bar{\lambda}_\sigma(\underline{y}) = \sum\limits_{\tau\geqslant\emptyset} \frac{\lambda_\sigma(\tau)}{\varphi(\tau)q(\tau)} \frac{\underline{y}^\tau}{\tau!\,\pi(\tau)}$. Тогда

$$h(\underline{y})\bar{\lambda}_\sigma(\underline{y}) = \sum_\delta h(\delta)\frac{\underline{y}^\delta}{\delta!\,\pi(\delta)} \sum_\nu \frac{\lambda_\sigma(\nu)}{\varphi(\nu)q(\nu)} \frac{\underline{y}^\nu}{\nu!\,\pi(\nu)} =$$

$$= \sum_{\tau\geqslant\emptyset} \frac{\underline{y}^\tau}{\tau!\,\pi(\tau)} \sum_{\emptyset\leqslant\nu\leqslant\tau} C_\tau^\nu h(\tau-\nu)\frac{\lambda_\sigma(\nu)}{\varphi(\nu)q(\nu)} = \sum_\tau \frac{\underline{y}^\tau}{\tau!\,\pi(\tau)} h(\tau)p(\sigma,\tau) = \Gamma_\sigma h(\underline{y}),$$

или

$$\bar{\lambda}_\sigma(\underline{y}) = \frac{\Gamma_\sigma h(\underline{y})}{h(\underline{y})} . \tag{20}$$

Отсюда по (14′) $\bar{\lambda}_\sigma(\underline{y}) = \dfrac{1-u(\underline{y})}{1-\Gamma_\sigma u(\underline{y})}$ и

$$\mathfrak{R}_m \Gamma_\sigma^{-1} \bar{\lambda}_\sigma(\underline{y}) = \frac{1-\mathfrak{R}_m \Gamma_\sigma^{-1} u(\underline{y})}{1-\mathfrak{R}_m u(\underline{y})} \tag{21}$$

Далее $\partial_{y_m} \mathfrak{R}_m h(\underline{y}) = \dfrac{\partial_{y_m} \mathfrak{R}_m^* u(\underline{y})}{(1-\mathfrak{R}_m u(\underline{y}))^2}$, откуда по (8′) и (14′)

$$\partial_{y_m} \mathfrak{R}_m^* c^*(\underline{y}) = \frac{\partial_{y_m} \mathfrak{R}_m^* u(\underline{y})}{1-\mathfrak{R}_m u(\underline{y})} \tag{22}$$

Составим и преобразуем, используя соотношения (6), (18 и (13'), выражение

$$\sum_{\sigma, m_\sigma = m} \frac{s^*(\sigma)\, \underline{y}^{\sigma-(m)}}{\varphi(\sigma)\, q(\sigma)(\sigma-(m))!\, \pi(\sigma)} \Omega_m \Gamma_\sigma^{-1} \bar{\lambda}_\sigma(\underline{y}) =$$

$$= \sum_{\sigma} \frac{s^*(\sigma)\, \underline{y}^{\sigma-(m)}}{\varphi(\sigma)\, q(\sigma)(\sigma-(m))!\, \pi(\sigma)} \sum_{\nu, m_\nu \geq m} \frac{\lambda_\sigma(\nu)}{\varphi(\nu)\, q(\nu)\, p(\sigma,\nu)} \frac{\underline{y}^{\nu}}{\nu!\, \pi(\nu)} =$$

$$= \sum_{\sigma,\nu} \frac{\underline{y}^{\sigma+\nu-(m)}}{(\sigma+\nu-(m))!\, \pi(\sigma+\nu)} C_{\sigma+\nu-(m)}^{\sigma-(m)}\, s^*(\sigma)\, \lambda_\sigma(\nu) \frac{1}{\varphi(\sigma+\nu)\, q(\sigma)\, q(\nu)\, p(\sigma,\nu)} =$$

$$= \sum_{\tau, m_\tau = m} \frac{\underline{y}^{\tau-(m)}}{(\tau-(m))!\, \pi(\tau)} \frac{1}{\varphi(\tau)\, q(\tau)} \sum_{(m) \leq \sigma \leq \tau} C_{\tau-(m)}^{\sigma-(m)}\, \lambda_\sigma(\tau-\sigma)\, s^*(\sigma) =$$

$$= \sum_{\tau} \frac{\underline{y}^{\tau-(m)}}{(\tau-(m))!\, \pi(\tau)} \frac{a_{(m)}(\tau)}{\varphi(\tau)\, q(\tau)} = \sum_{\tau, m_\tau = m} c^*(\tau) \frac{\underline{y}^{\tau-(m)}}{(\tau-(m))!\, \pi(\tau)} = \partial_{y_m} \Omega_m^* c^*(\underline{y}).$$

Отсюда по (22)

$$\sum_{\sigma, m_\sigma = m} \frac{s^*(\sigma)\, \underline{y}^{\sigma-(m)}}{\varphi(\sigma)\, q(\sigma)(\sigma-(m))!\, \pi(\sigma)} \Omega_m \Gamma_\sigma^{-1} \bar{\lambda}_\sigma(\underline{y}) = \frac{\partial_{y_m} \Omega_m^* u(\underline{y})}{1-\Omega_m u(\underline{y})}. \quad (23)$$

С другой стороны, в силу (21),

$$\sum_{\sigma, m_\sigma = m} \frac{s^*(\sigma)\, \underline{y}^{\sigma-(m)}}{\varphi(\sigma)\, q(\sigma)(\sigma-(m))!\, \pi(\sigma)} \Omega_m \Gamma_\sigma^{-1} \bar{\lambda}_\sigma(\underline{y}) =$$

$$= \sum_{\sigma, m_\sigma = m} \frac{s^*(\sigma)\, \underline{y}^{\sigma-(m)}}{\varphi(\sigma)\, q(\sigma)(\sigma-(m))!\, \pi(\sigma)} \frac{1-\Omega_m \Gamma_\sigma^{-1} u(\underline{y})}{1-\Omega_m u(\underline{y})}$$

Приравняв правые части обоих выражений и сократив $1-\Omega_m u(\underline{y})$, получаем

$$\sum_{\sigma, m_\sigma = m} \frac{s^*(\sigma)\, \underline{y}^{\sigma-(m)}}{\varphi(\sigma)\, q(\sigma)(\sigma-(m))!\, \pi(\sigma)} \left(1-\Omega_m \Gamma_\sigma^{-1} u(\underline{y})\right) = \partial_{y_m} \Omega_m^* u(\underline{y}). \quad (24)$$

Преобразуем это выражение.

$$\sum_{\sigma,\, m_\sigma = m} \frac{s^*(\sigma)\, \underline{y}^{\sigma-(m)}}{\varphi(\sigma)\, q(\sigma)(\sigma-(m))!\, \pi(\sigma)} \left(1 - \sum_{\nu,\, m_\nu \geq m} u(\nu)\, \frac{\Gamma_\sigma^{-1}\, \underline{y}^{\nu}}{\nu!\, \pi(\nu)}\right) =$$

$$= \sum_{\tau,\, m_\tau = m} \frac{\underline{y}^{\tau-(m)}}{(\tau-(m))!\, \pi(\tau)\varphi(\tau) q(\tau)} \left(s^*(\tau) - \sum_{(m)\leq\sigma\leq\tau} C_{\tau-(m)}^{\sigma-(m)} s^*(\sigma) u(\tau-\sigma)\varphi(\tau-\sigma) q(\tau-\sigma)\right) = \sum_{\tau,\, m_\tau = m} u(\tau) \frac{\underline{y}^{\tau-(m)}}{(\tau-(m))!\, \pi(\tau)}.$$

Приравняв в последнем равенстве одинаковые члены, получаем

$$s^*(\tau) - \sum_{(m)\leq\sigma\leq\tau} C_{\tau-(m)}^{\sigma-(m)} s^*(\sigma) u(\tau-\sigma)\varphi(\tau-\sigma) q(\tau-\sigma) = u(\tau)\, \varphi(\tau)\, q(\tau), \quad \tau \neq \phi,$$

при $m = m_\tau$, что равносильно (17). Теорема доказана.

Схема вычислений по (17), (15) и (16) существенно проще схемы, использующей (18), (19) и (12). Кроме того, (17) позволяет получить сравнительно простое „замкнутое" выражение $S(t,x)$, подобное (9). С этой целью рассмотрим соотношение

$$\partial_{y_m} \mathfrak{R}_m^* s^*(\underline{y},x) = \frac{\partial_{y_m} \mathfrak{R}_m v(\underline{y},x)}{1 - \mathfrak{R}_m v(\underline{y},x)}, \tag{25}$$

которое выводится из (17) точно так же, как из (7) выводится (8). Потенцируя (25), получаем

$$\mathfrak{R}_m^* s^*(\underline{y},x) = -\log\left(1 - \mathfrak{R}_m v(\underline{y},x)\right) + \log\left(1 - \mathfrak{R}_m v(\underline{y},x)\right)\Big|_{y_m=0} =$$

$$= -\mathfrak{R}_m^* \log\left(1 - v(\underline{y},x)\right).$$

Отсюда вытекает (ср. вывод (11) и (11′) выше)

<u>Следствие.</u>

$$s^*(\underline{y},x) = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d}\, \theta_d\, s(\underline{y},x^d) = -\log\left(1 - v(\underline{y},x)\right). \tag{26}$$

С помощью теоретико-числовой функции Мёбиуса μ это соотношение можно обратить (см. [15]), что дает

$$S(\underline{y},x) = -\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\mu(r)}{r} \log(1-\theta_r v(\underline{y}, x^r)) \tag{27}$$

Применим теперь к (26) подстановку Φ. Получим искомый основной результат.

Теорема 2.

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{S(t^d, x^d)}{d} = -\log(1-V(t,x)) \tag{28}$$

где $V(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V(n,x) t^n$

$$V(n,x) = \sum_{N=0}^{n(n-1)} V(n,N) x^N = \sum_{|\tau|=n} \frac{v(\tau,x)}{\tau!\, \pi(\tau)} \tag{29}$$

В самом деле,

$$\Phi \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\theta_d}{d} S(\underline{y}, x^d) = \Phi \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} \sum_{\tau} \frac{s(\tau, x^d)}{\tau!\, \pi(\tau)} \prod_{l} y_{l_d}^{j_l} =$$

$$= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\tau|=n} \frac{s(\tau, x^d)}{\tau!\, \pi(d)} t^{dn} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d} S(t^d, x^d)$$

Как отмечено во введении, соотношение (9) является частным случаем общего выражения для производящей функции числа неизоморфных связных графов, образующих некоторый класс K, через производящую функцию числа неизоморфных графов, все компоненты связности которых принадлежат K. Отсюда вытекает

Следствие. $(1-V(t,x))^{-1}$ есть перечисляющая производящая функция неизоморфных сильно п о л у с в я з н ы х обыкновенных диграфов, т.е. диграфов, все компоненты слабой связности которых сильно связны.

Формула (28) равносильна соотношению

$$S(n,x) = V(n,x) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} V(k,x)\sum_{m|n-k} m\,S(m,x^{\frac{n-k}{m}}) - \frac{1}{n}\sum_{\substack{m|n\\ m\neq n}} m\,S(m,x^{\frac{n}{m}}), \quad (30)$$

используемому для вычислений и в сущности сводящему нахождение $S(n,x)$ к вычислению $V(m,x)$, $m \leqslant n$.

При $m=1$ выражение (25) приобретает следующий вид (поскольку $\partial_{y_1} s^*(\underline{y},x) = s'(\underline{y},x)$):

$$s'(\underline{y},x) = \frac{v'(\underline{y},x)}{1 - v(\underline{y},x)}, \quad (27')$$

где $v'(\underline{y},x) = \partial_{y_1} v(\underline{y},x)$, откуда следует

<u>Теорема 2'</u>. Для неизоморфных корневых сильно связных диграфов справедлива формула

$$S'(t,x) = \frac{V'(t,x)}{1 - V(t,x)}, \quad (28')$$

где

$$V'(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} V'(n,x)\,t^n, \quad V'(n,x) = \sum_{\substack{|\tau|=n\\ \tau \geqslant 1}} \frac{v(\tau,x)}{(\tau-1)!\,\pi(\tau)}.$$

Формулы (27') и (28') также имеют очевидное сходство с известными (и легко доказываемыми) соотношениями для связных корневых графов (см. [18, 7])

$$c'(\underline{y},x) = \frac{q'(\underline{y},x)}{q(\underline{y},x)}, \quad C'(t,x) = \frac{Q'(t,x)}{Q(t,x)}.$$

§3. Выражение $V(n,x)$

Результирующие формулы предыдущего параграфа имеют такой вид, по которому можно было бы ожидать, что они допускают непосредственную комбинаторную интерпретацию. Это действительно имеет место (см. сноску на стр. 24), но в настоящей работе мы не будем на этом останавливаться. Интересно однако заметить, что в совокупности $V(n,N)$ (а также $v(\tau,N)$ и аналогично $u(\tau,N)$) не имеют прямой комбинаторной интерпретации как соответствующие количества графов какого-либо класса V, так как при некоторых N они отрицательны (см. [8] и [11]). Можно дать лишь обобщенную интерпретацию $V(n,N)$. Соотношение (28) равносильно записывается в следующем виде:

$$1 - V(t,x) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{N=0}^{n(n-1)} (1 - t^n x^N)^{S(n,N)} . \quad (31)$$

Отсюда вытекает, что $V(n,N)$ равно р а в н о с т и между количеством неизоморфных сильно полусвязных диграфов с n вершинами и N дугами с нечетным числом попарно неизоморфных компонент связности и аналогичным количеством с четным числом компонент. Отсюда (или из (30)) при достаточно больших N значения $V(n,N)$ приобретают тривиальную интерпретацию: $V(n,N) = S(n,N)$ при $N > (n-1)(n-2)$.

Неожиданно оказывается, что совсем иной характер в указанном отношении носят результаты перечисления лишь по n, т.е. при $x = 1$. Пусть $p_T(\tau)$ означает число т у р н и р о в (т.е. обыкновенных полных антисимметрических диграфов [1]), инвариантных относительно подстановки g и $s_T(\tau)$ - соответствующее число сильно связных турниров. Как известно, $p_T(\tau) = q(\tau)$ для τ, не содержащих ч е т н ы х слагаемых (очевидно, $p_T(\tau) = 0$ для остальных τ). Кроме того методом вложения легко устанавливается следующее соотношение, хорошо известное для $\tau = (1^n)$ (см., например, [10, 4]):

$$\sum_{\emptyset < \epsilon \leq \tau} C_\tau^\epsilon \, p_T(\tau - \epsilon) \, s_T(\epsilon) = p_T(\tau), \quad \tau \neq \emptyset, \quad (32)$$

для тех же τ. В силу предыдущего тождества, соотношение (32) совпадает с (16) при $x = 1$, поэтому ввиду (4) имеют место тождества:

$$u(\tau) = s_T(\tau),$$

$$v(\tau) = p_T(\tau)\, s_T(\tau) \qquad (33)$$

для $\tau = (1^{i_1} 3^{i_3} 5^{i_5} \dots)$, где $v(\tau) = v(\tau, x)\big|_{x=1}$ (напоминаем, что в данном случае $\overline{\Delta}\, y^{\tau} = 1$). Следовательно, для таких τ значениям $v(\tau)$ можно придать прямую, хотя и искусственную и н т е р п р е т а ц и ю: это есть число всевозможных пар, состоящих из турнира и сильно связного турнира с одним и тем же множеством вершин, каждый из которых инвариантен относительно g. В частности, это толкование справедливо для случая отмеченных вершин, т.е. значения $v(n) = v((1^n)) = V(n,x)\big|_{x=1}$ допускают прямую комбинаторную интерпретацию, вопреки предположению Е.М.Райта [11]*). Что касается всей совокупности значений $v(\tau)$ и $V(n)$, то возможность единообразной их интерпретации соответствующим образом для какого-либо гипотетического класса $\underline{V}$ представляется маловероятной, хотя тоже не исключена (интересно, что отвергнуть её с помощью предложения 1 на основании имеющихся численных результатов не удается).

---

*) Удивительно, что Райт, будучи хорошо знакомым с формулой (32) для $\tau = (1^n)$ (см. [10]), упустил из виду её сходство с (16). Следует, правда, отметить, что в [11] не рассматривалась $u(n)$ и, вместо соотношения (16), использовалось равносильное ему (при $\tau = (1^n)$) рекуррентное соотношение для $v(n)$.

Функция $V(n,x)$ вполне определяется формулами (29), (15) и (16), но вычисления по ним требуют довольно громоздкой работы с разбиениями, аналогичной той, которая проделывалась в [5] для выражения $\dot{A}(n)$, ввиду очевидного сходства определяющих v и a' формул. В частности, можно получить явное выражение $V(n,x)$ в виде $\sum$ произведений определенных функций от разбиений, взятой по многочисленным специальным объектам – разбиениям разбиений. Однако в рамках излагаемого аппарата имеется более эффективное выражение, которое мы сейчас выведем.

Рассмотрим ряд

$$F = 1-(\rho D)^{-1}. \tag{34}$$

Из (8') и (14) вытекает, что

$$u(\underline{y},x) = \Lambda F,$$

из (4) и (15), – что

$$v(\underline{y},x) = \Delta \Lambda' \Lambda \rho' F. \tag{35}$$

Отсюда, в силу (2'), сразу получаем требуемый результат.

<u>Теорема</u> 3.

$$V(t,x) = \Phi\, \Delta \Lambda' \Lambda \rho' F. \tag{36}$$

Пусть F_n означает часть F веса n относительно $\underline{y}$, состоящую из всех одночленов F вида $f\underline{y}^{\tau}$, где $|\tau|=n, f\in\mathcal{F}$. Тогда устанавливается

<u>Следствие</u>.

$$V(n,x) = \bar{\Delta} \Lambda' \Lambda \rho' F_n, \quad n\geqslant 1, \tag{37}$$

где многочлен F_n удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$F_n = \rho D_n - \sum_{k=1}^{n-1} F_k\, \rho D_{n-k}, \quad n>1; \quad F_1 = \rho D_1 = y_1. \tag{38}$$

Аналогично (поскольку $\partial_{y_1} \rho D = y_1^{-1}\rho(y_1 D)$)

<u>Теорема</u> 3'.

$$V'(t,x) = \Phi\, \Delta \Lambda' \Lambda \rho' (y_1 F'), \tag{36'}$$

где $F' = \partial_{y_1} F = \rho(y_1 D)/y_1(\rho D)^2$.

Столь же просто из (12) при $m=1$ получается основной результат статьи [7], выведенный там значительно более сложным и частным путем, базирующимся на подходе Робинсо

Предложение 2 [7].

$$A'(t,x) = \Phi \Delta \Lambda' \Lambda \rho' E', \quad A'(n,x) = \bar{\Delta} \Lambda' \Lambda \rho' E'_n, \tag{39}$$

где

$$E' = \sum_{n=1}^{\infty} E'_n = \frac{\rho(y_1 D)}{\rho D}, \tag{40}$$

$$E'_n = \rho(y_1 D_{n-1}) - \sum_{k=1}^{n-1} E'_k \rho D_{n-k}$$

Замечания. 1) $\Lambda' \rho' F = q(y, x) * F$, где $*$ означает операцию внутреннего произведения относительно переменных y_i, т.е. $\mathcal{J}$ — билинейную операцию на $\mathfrak{R}$, для которой $y^\tau * y^\tau = \tau! \pi(\tau) y^\tau$, $y^\tau * y^\sigma = 0$, где $\sigma \neq \tau$. Поэтому (36) и (39) можно равносильно записать (учитывая, что $r * D = r$, $r \in \mathfrak{R}$, $\Lambda E' = c'(y, x)$) в виде

$$V(t,x) = 1 - \Phi \Delta (q(y,x) * q(y,x)^{-1}), \tag{41}$$

$$A'(t,x) = \Phi \Delta (q(y,x) * c'(y,x)),$$

что представляет интерес во многих аспектах, особенно в вычислительном (см. [12]).

2) В приведенных формулах можно было обойтись без переменных z'_k, используя ρ вместо ρ', однако для обоб щений удобнее записывать формулы именно в таком виде.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Берж К., Теория графов и её применения, М., 1962.
2. De Bruijn N.G., Enumerative combinatorial problems concerning structures, Nieuw Arch. Wisk., 11, N 3(1963), 142-161.
3. Де Брейн Н.Г., Теория перечисления Пойа, в сб. "Прикладная комбинаторная математика", М., 1968, 61-106.
4. Лисковец В.А., Об одном рекуррентном методе подсчёта графов с отмеченными вершинами, ДАН СССР, 184, № 6 (1969), 1284-1287.
5. Лисковец В.А., Подсчёт корневых инициально связных ориентированных графов, Изв. АН БССР, сер. физ-мат. н., № 5 (1969), 23-32.
6. Лисковец В.А., Число сильно связных ориентированных графов, Матем. заметки, 8, № 6 (1970), 721-732.
7. Лисковец В.А., Подсчёт корневых инициально связных ориентированных графов. II. Метод Редфилда-Робинсона, Изв. АН БССР, сер. физ-мат. н., № 3 (1973), 35-44.
8. Лисковец В.А., К перечислению сильно связных ориентированных графов, ДАН БССР, 17, № 12 (1973), 1077-1080.
9. Parthasarathy K.R., Sridharan M.R., On structure enumeration theory, Indag. Math., 33, N 4(1971), 327-339.
10. Wright E.M. The number of irreducible tournaments, Glasgow Math. J., 10, N 2 (1970), 97-101

11. Wright E.M., The number of strong digraphs, Bull. London Math. Soc., 3, N 3 (1971), 348-350.
12. Read R.C., The use of S-functions in combinatorial analysis, Canad. J. Math., 20, N 4 (1968), 808-841.
13. Риордан Дж., Введение в комбинаторный анализ, М., 1961.
14. Robinson R.W., Enumeration of colored graphs, J. Combin. Th., 4, N 2 (1968), 181-190.
15. Robinson R.W., Enumeration of non separable graphs, J. Combin. Th., 9, N 4 (1970), 327-356.
16. Robinson R.W., Enumeration of acyclic digraphs, В сб. „Proc. 2nd Chapel Hill Conf. Comb. Math. Appl.", Univ. N. Carolina, 1970 (1971), 391-399.
17. Robinson R.W., Counting labeled acyclic digraphs, В сб. „New directions in the theory of graphs", Ed. F. Harary, 1973, 239-273.
18. Harary F., The number of linear, directed, rooted and connected graphs, Trans. Amer. Math. Soc., 78, N 2 (1955), 445-463.
19. Харари Ф., Теория графов, М., 1973.
20. Harary F., Palmer E.M., Graphical Enumeration, Acad. Press, 1973.